Mathématiques

DUT 1

M. Samy Modeliar

Travaux dirigés 23

Probabilités, fiabilité

Exercice 1 *Un matériel électronique a une durée de vie moyenne de* 3200 *heures. On a tout lieu de penser que sa fiabilité suit une loi exponentielle.*

1. *Déterminer sa fonction de fiabilité.*
2. *Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore au bout de* 2000 *heures ? Au bout de* 4000 *heures ?*

Exercice 2 *Pour étudier la fiabilité d'un type d'appareil on procède au relevé statistique de la durée de vie d'un échantillon de taille* 100*. Le résutat est donné dans le tableau ci-dessous :*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	100	79	67	58	41	39	31	21	19	17	15

où t est le temps exprimé en centaines d'heures et n est le nombre d'appareils en fonction.

On estime que la fréquence des appareils en fonction est une bonne approximation de la fonction de fiabilité $R(t)$.

1. *Montrer que l'on peut admettre que la fiabilité de cet appareil suit une loi exponentielle*

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

On cherchera à établir la relation

$$\ln [R(t)] = -\lambda t$$

par la méthode graphique puis par la méthode des moindres carrés.

Pour cette dernière on obtiendra vraissemblablement un fonction du type $y = ax + b$ mais b étant faible, on le négligera.

Montrer que l'on peut estimer, avec une précision convenable, que :

$$R(t) = e^{-0,2t}.$$

2. *En utilisant le résultat ci-dessus, calculer* $R(5)$ *et* $R(6)$.
3. *Répondre à la question : "Si un appareil est en fonction à* $t=5$, *quelle est la probabilité qu'il le soit encore à* $t=6$ *?"*
4. *De manière plus générale, si un appareil est en fonction à* t, *quelle est la probabilité qu'il le soit encore à* $t+1$ *?*
5. *Déterminer la durée de vie moyenne de ce type d'appareil.*

Exercice 3 *Soit la fonction réelle* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(t)=\left\{\begin{array}{cc} 0 & si \quad t<0 \\ 1-e^{-\alpha t^2} & si \quad t\geq 0 \end{array}\right.$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. *Quelle condition doit remplir* α *pour que* $F(t)$ *soit la fonction de répartition d'une variable* T *?*
2. *Étudier et représenter* $F(t)$ *pour* $\alpha=1$.
3. *Posons que* $F(t)=P(T<t)$ *désigne la probabilité pour que la durée de vie d'un appareil soit inféieure à* t.
   Définir la fonction de fiabilité correspondante, la densité de probabilité correspondante, la densité de probabilité de défaillance de T *et la fonction taux de défaillance* $Z(t)$.
4. *Dans cette étude,* t *est exprimé en heures* $\times 10^4$ *(*$t=1$ *signifie odnc* $t=10000$ *heures).*
   (a) *Déterminer* α *pour que la probabilité d'une durée de vie d'au moins* 10000 *heures soit* $P=0,90$.
   (b) *Calculer l'espérance de vie* $E(T)$ *et l'écart-type* σ_T, *en notant que la loi suivie par* T *est un loi de Weibull.*
5. *Une transmision mécanique comporte trois engrenages suivant la même loi avec* $P(T>1)=0,90$.
   Quelle est la probabilité pour que la durée de vie du système soit aumoins 10000 *heures ?*

Exercice 4 *On estime que la fiabilité d'un appareil suit une loi de Weibull :*

$$R(t)=e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}.$$

Dans ce problème t *sera exprimé en milliers d'heures.*
Une étude révèle que :
– 90% *des appareils fonctionnent encore à* 5000 *heures,*
– 20% *des appareils fonctionnent encore à* 10000 *heures.*

1. *Les données précédentes sont traduites par les égalités :*

$$\left\{\begin{array}{ccc} R(5) & = & 0,90 \\ R(10) & = & 0,20 \end{array}\right..$$

   Calculer β *et* η.
2. *Un relevé effectué sur un échantillon de* 100 *appareils donne le résultat ci-dessous :*

F (%)	1	5	10	40	80	90
t	2,85	4,01	5,02	7,78	10,03	10,58

   où F *représente le pourcentage d'appareils hors service et* t *le temps en milliers d'heures.*

(a) *Vérifier à l'aide du graphique de Weibull que cette distribution est conforme aux suppositions.*

(b) *Déterminer β et η et comparer.*

3. *Déterminer la durée de vie moyenne espérée de ces appareils, et l'écart-type.*

Exercice 5 *Un relevé statistique des avaries d'un matériel about it au tableau ci-dessous :*

t (heures)	4822	568	721	902	1153	1415	1647
$F(t)$ (%)	10	15	25	40	60	80	90

où $F(t)$ est la probabilité pour qu'un matériel soit tombé en avarie avant l'instant t, donc en statisitque el pourcentage d'appareils aui sont tombés en avarie avant l'instant t.

Déterminer la loi de Weibull et la fonction de fiabilité corrspondant à ce problème.

Exercice 6 *Un système de contrôle électronique de haute sécurité comprend 1250 composants dont la fiabilité suit un loi exponentielle de taux de défaillance*

$$\lambda_i = 10^{-5} \quad \text{(l'unité de temps étant l'heure).}$$

1. *Quelle est la loi suivie par le système ?*
2. *Ce système doit pouvoir fonctionner pendant 10 minutes. Quelle est la probabilité de son fonctionnement ?*
3. *Le risque envisageable ne doit pas dépasser 0,1%. Ce système peut-il convenir ?*
4. *Calculer le nombre maximum de composants admissible.*

Exercice 7 *Un circuit de commande doit être protégé contre les surintensités. Pour améliorer la sûreté de déclenchement, on dispose en série deux relais. Le système de protection fonctionnera si l'un ou l'autre déclenche. C'est donc, sur le plan de la fiabilité, un système parallèle.*

On estime que la fiabilité de chaque relais suit une loi exponentielle de MTBF 15000 heures.

1. *Déterminer la fonction de fiabilité du système composé des deux relais.*
2. *Calculer l'espérance mathématique $E(T)$ du système ainsi composé.*

Exercice 8 *Un système de contrôle pour l'aéronautique doit fonctionner avec une grande fiabilité. On cherche à obtenir au moins 1000 heures de fonctionnement avec une probabilité 0,99.*

1. *Les éléments de contrôle utilisé suivent la loi exponentielle :*

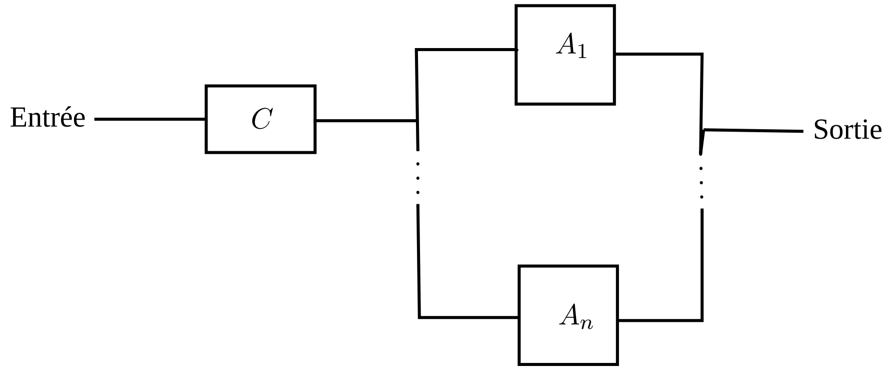
$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

   Calculer λ_i sachant que la probabilité pour qu'un élément quelconque fonctionne encore à 500 heures est 0,95.

2. *Pour obtenir le résultat recherché :*

$$P(T \geq 1000) = 0,99$$

   on est amené à grouper en parallèle des éléments du type défini ci-dessus, mais on doit leur adjoindre un commutateur, selon le shéma ci-dessous :



Le rôle du commutateur est demettre en service un élément de contrôle en état de marche, et un seul.

(a) *Le commutateur suit lui-même une loi de fiabilité exponentielle, telle qu'il fonctionne au moins* 2000 *heures avec la probabilité* $0,99$. *Déterminer son taux de défaillance* λ_c.

(b) *En utilisant deux éléments de contrôle, la probabilité de fonctionnement de l'ensemble pendant au moins* 1000 *heures est-elle satisfaisante ?*

(c) *Calculer la probabilité pour que l'ensemble composé de* 3 *éléments* $A_1,\ A_2$ *et* A_3 *en parallèle et du commutateur en série soit encore en état de marche à* 1000 *heures.*